24/03/2015

Calcolo = settore della matematica che ricorre ai metodi di numerica approssimazione.

Spesso in matematica dice che $\exists$ soluzione $\Rightarrow \exists!$, ma non dice quale è o come calcolarla.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Esempio

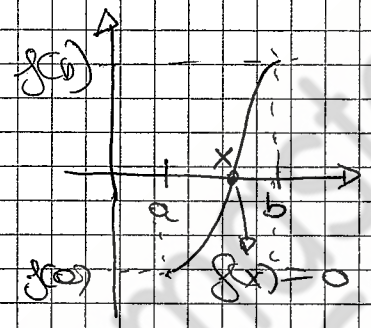
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f(a) \cdot f(b) < 0$

$\Downarrow$

$\exists\, x \in (a,b)$ tale che $f(x) = 0$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745



È un Teo. di esistenza, ma però non indica come poter calcolare tale (X).

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Esempio

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad -\infty < a < b < +\infty$ (a, b numeri finiti)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

con F tale che $F'(x) = f(x)$

Tuttavia se $f(x) = e^{-x^2}$ allora non si trova la primitiva.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

master COPY COPISTERIA

PROPRIETÀ RICHIESTE AD UN METODO NUMERICO

1) Deve fornire una approssimazione della soluzione possibilmente con un errore piccolo.
2) Basso costo computazionale (piccolo uso di risorse di calcolatore)
3) Facilmente implementabile su calcolatore

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

MISURE DELL'ERRORE

x numero reale che sia soluzione esatta del problema
$\tilde{x} \in \mathbb{R}$ soluzione approssimata del problema

$$\boxed{Dx = \tilde{x} - x}$$ ERRORE ASSOLUTO

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Esempio

$Dx = 10^{-3}$ è un errore grande o piccolo?

↓

Dipende da x

Se $x = 10^{3}$ → Dx piccolo

Se $x = 10^{-6}$ → Dx grande

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Se $x \neq 0$, $\boxed{\varepsilon_x = \frac{Dx}{x}}$ ERRORE RELATIVO

È una normalizzazione dell'errore assoluto. Tiene conto dell'ordine di grandezza della x.

Nell'esempio sopra

$$\varepsilon_x = \frac{10^{-3}}{10^{3}} = 10^{-6} \rightarrow \text{piccolo}$$

$$\varepsilon_x = \frac{10^{-3}}{10^{-6}} = 10^{3} \rightarrow \text{grande}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\tilde{x} - x}{x} \quad \Longrightarrow \quad x\varepsilon_x = \tilde{x} - x$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{x} = x(1+\varepsilon_x)$$

$$\frac{\tilde{x}}{x} = 1 + \varepsilon_x$$

Se ε_x fa allontanare questo da 1 allora abbiamo un errore relativo grande

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

TIPOLOGIE DI ERRORE (e principali)

1) Errori di discretizzazione/troncamento → Sono errori legati alla definizione del metodo numerico

Problema da risolvere, dominio continuo → Problema approssimato, dominio discreto

L'errore introdotto in questo passaggio è l'errore di discretizzazione

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Esempio

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \in \mathbb{R}$ → $f'(x)$ (una cosa che si può calcolare)

Usa definizione di $f'(x)$ → $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

↳ È definito su un dominio continuo

Bisogna dare valore al dominio continuo fisso $\tilde{h} \neq 0$, $\tilde{h} \neq 0$.

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\tilde{h}) - f(x)}{\tilde{h}} = \varphi_{\tilde{h}}(x)$$ → È una approssimazione

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$\exists \delta > 0$ tale che $f \in C^2(x-\delta, x+\delta)$

$$f(x+\tilde{h}) = f(x) + f'(x)\tilde{h} + \frac{1}{2}f''(\xi)\tilde{h}^2$$ Sviluppo di Taylor troncato

(Da cui errore di troncamento)

$$\varphi_{\tilde{h}}(x) = \frac{f(x) + f'(x)\tilde{h} + \frac{1}{2}f''(\xi)\tilde{h}^2 - f(x)}{\tilde{h}} = f'(x) + \frac{1}{2}f''(\xi)\tilde{h}$$

Quindi l'errore commesso è $\varphi_{\tilde{h}}(x) - f'(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)\tilde{h}$ → ERRORE ASSOLUTO DI DISCRETIZZAZIONE

2) Errore di convergenza → dove agisce il modo di utilizzo del metodo numerico.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$\begin{cases} x_0 \text{ assegnato (dato)} \\ x_{n+1} = \Phi(x_n) \qquad n = 0, 1, 2 \dots \end{cases}$$

Φ: funzione che definisce il metodo

Metodo iterativo che permette di trovare le soluzioni successive approssimate applicando la Φ varie volte, così da ottenere una soluzione sempre più precisa

$$x_0 \to x_1 = \Phi(x_0) \to x_2 = \Phi(x_1) \to \dots$$

se $\lim_{n\to+\infty} x_n = x^* \in \mathbb{R}$ allora il metodo iterativo è un metodo convergente

x^*: soluzione del problema

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Supponiamo Φ continua e metodo convergente, allora

$$x^* = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \Phi(x_n) = \Phi\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = \Phi(x^*)$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$x^* = \Phi(x^*)$$

x^* è punto fisso di Φ.

Supponiamo di fermarci alle iterazione a

$$n = N-1 \to x_N$$

$x_N - x^*$ è l'errore assoluto di convergenza.

Esempio

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$ Funzione di iterazione

$$\Phi(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

Allora $x^* = \sqrt{2}$ è punto fisso di Φ

Quindi se applico il metodo iterativo per diversi valori ci avvicineremo sempre più a $\sqrt{2}$, soluzione del problema

$|x_{n+1} - \sqrt{2}| = 10^{-12}$ è il mio criterio di convergenza

3) Errori di "round-off" → Errori legati all'utilizzo di un calcolatore elettronico

3.1- Errori di rappresentazione

3.2. Errori introdotti durante il calcolo

Parliamo degli errori di rappresentazione

Numeri interi non negativi

- $b = 10$ → $0, 1, 2 \dots, 9$

Per scrivere un numero a più cifre si utilizza il sistema posizionale a base 10 ($b = 10$)

STRINGA

$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N$ $\quad \alpha_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$

$$n = \alpha_1 \cdot 10^{N-1} + \alpha_2 \cdot 10^{N-2} + \dots + \alpha_N \cdot 10^0$$

Esempio

$N = 3 \quad \alpha_1 = 8, \ \alpha_2 = 1, \ \alpha_3 = 8$

$$818 = 8 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

Con N cifre posso rappresentare senza errore

$\{0, 1, 2 \dots, 10^N - 1\}$ numeri